

**6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen****6.1 Modelllösungen****Modelllösung a)**

Bei gegebener Matrix  $\ddot{U}_{a,b}$  kann der Bestand durch den Vektor  $\begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$  dargestellt werden.

$$\text{Aus } \begin{pmatrix} E' \\ I'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix} = \ddot{U}_{a,b} \cdot \begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot I_1 + b \cdot I_2 \\ 0,1 \cdot E \\ 0,4 \cdot I_1 \end{pmatrix} \text{ ergeben sich damit die folgenden Zusammenhänge.}$$

$E' = a \cdot I_1 + b \cdot I_2$ : Gesamtzahl der Eier, die von Insekten der Entwicklungsstufen  $I_1$  und  $I_2$  gelegt werden,

$I'_1 = 0,1 \cdot E$ : Anzahl der Insekten der Entwicklungsstufe  $I_1$ , die sich aus 10 % der Eier entwickeln,

$I'_2 = 0,4 \cdot I_1$ : Anzahl der Insekten der Entwicklungsstufe  $I_2$ , in die sich 40 % der Insekten der Entwicklungsstufe  $I_1$  verwandeln.

Das entspricht dem im Übergangsgraphen dargestellten Sachverhalt.

Die Parameter  $a$  bzw.  $b$  geben die Erzeugungsraten von Eiern durch Insekten der Entwicklungsstufe  $I_1$  bzw.  $I_2$  an.

**Modelllösung b)**

Mit  $a = 10$  und  $b = 5$  ergibt sich die Übergangsmatrix:

$$\ddot{U} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Der Startvektor lautet } \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Mit } \vec{x}_k = \ddot{U} \cdot \vec{x}_{k-1} \text{ (} k = 1, 2, 3 \text{) er-}$$

$$\text{hält man die Verteilungsvektoren } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Modelllösung c)**

Aus den Angaben des Aufgabentextes ergibt sich die veränderte Übergangsmatrix

$$\vec{U}_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Für den Startvektor gilt nun } \vec{x}_0 = 0,4 \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Für die zukünftigen Insektenpopulationen ergeben sich die Verteilungen

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 3,2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 80 \\ 1,6 \\ 3,2 \end{pmatrix} = 0,2 \cdot \vec{x}_0. \text{ Daran erkennt man, dass die Population nicht}$$

überlebensfähig ist.

Zu dieser Aussage kann man auch durch allgemeine Rechnung oder unmittelbar durch Bildung des Produkts aus Erzeugungsrate und Überlebensraten kommen:  $5 \cdot 0,1 \cdot 0,4 = 0,2 < 1$ .

**Modelllösung d)**

Ausgehend von der Übergangsmatrix  $\vec{U}_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 5 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$  und dem Startvektor

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ erhält man:}$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_a^2 \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3200 \\ 600 \\ 80 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,1a & 2 & 0 \\ 0 & 0,1a & 0,5 \\ 0,04 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3200 \\ 600 \\ 80 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 200a + 2000 = 3200 \\ 100a = 600 \\ 80 = 80 \end{array} \right| \Leftrightarrow a = 6 \end{aligned}$$

**Modelllösung e)**

$$\ddot{U}_{10;5}^4 = (\ddot{U}_{10;5}^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,04 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0,02 & 1 & 0,5 \\ 0,04 & 0,08 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{U}_{10;5}^4 \cdot \begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + 4 \cdot I_1 + I_2 \\ 0,02 \cdot E + I_1 + 0,5 \cdot I_2 \\ 0,04 \cdot E + 0,08 \cdot I_1 \end{pmatrix}.$$

Die Größe der Population  $1,06 \cdot E + 5,08 \cdot I_1 + 1,5 \cdot I_2$  übertrifft nach vier Wochen die Größe  $E + I_1 + I_2$  der Anfangspopulation wenigstens um einen Faktor 1,06. Die Population wächst exponentiell und daher langfristig über alle Grenzen.

Alternative Lösungsmöglichkeiten:

Wenn man von einer Startpopulation ausgeht, die nur aus Eiern besteht, so ergibt sich:

$$\ddot{U}_{10;5}^2 \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix}, \quad \ddot{U}_{10;5}^4 \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0,02 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix}, \quad \ddot{U}_{10;5}^6 \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Eier hat nach 6 Wochen um 4 % zugenommen, die gesamte Population um 12 %. In der Startverteilung evtl. vorhandene Insekten ( $I_1$  und  $I_2$ ) legen zusätzliche Eier und erhöhen dadurch die Anzahl der Eier, auch wenn die Anzahl der Insekten ( $I_1$  und  $I_2$ ) selbst zwischenzeitlich rückläufig sein kann. Die Anzahl der Eier wächst also exponentiell mit einem Wachstumsfaktor von wenigstens 1,04 bezogen auf 6 Wochen und mit ihr die Anzahl der daraus entstehenden Insekten ( $I_1$  und  $I_2$ ).

Alternativ kann auch anhand des Terms  $0,1 \cdot a + 0,1 \cdot 0,4 \cdot b$ , gebildet aus Erzeugungsraten von Eiern und Überlebensraten, argumentiert werden.

**6.2 Teilleistungen – Kriterien****Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) <sup>1</sup>
	Der Prüfling	
1	begründet den Aufbau der Übergangsmatrix $\vec{U}$ .	6 (II)
2	erklärt die Bedeutung der Parameter $a$ und $b$ .	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe b)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	gibt die spezielle Übergangsmatrix an.	2 (I)
2	gibt den Startvektor an.	2 (I)
3	ermittelt den Ansatz für die Berechnung.	3 (II)
4	berechnet die Populationen der folgenden 3 Wochen.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	gibt die modifizierte Übergangsmatrix an.	2 (I)
2	nennt den neuen Startvektor.	2 (I)
3	prüft die Fragestellung mit Hilfe der Folgepopulationen.	4 (II)
4	begründet, dass die Population nicht überlebensfähig ist.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

<sup>1</sup> AFB = Anforderungsbereich