Auszug aus "Sinus.NRW - Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht", Handreichung, Ritterbach Verlag, 2013, Seiten 67 bis 84

5 Sinnvolles Üben im Mathematikunterricht

Rainer Altmann

5.1 Erläuterungen zur Themenwahl

„Übung macht den Meister" und „Ohne Fleiß kein Preis" sind zwei Aussagen, die uns alle geläufig sind. Schon vom ersten Schuljahr an, oder auch schon davor, versuchen Eltern bei verschiedenen Anlässen ihre Kinder zum Üben zu motivieren – mit und ohne Erfolg. Gerade in der heutigen Entwicklung, in der die Heterogenität von Lerngruppen Bestandteil vieler Diskussionen ist und in der die Schulzeit verkürzt wird, um früher bestimme schulische Abschlüsse zu erlangen, erscheint ein sinnvolles Üben als sehr wichtig. Gleichzeitig werden Aufgabenpäckchen, wie sie in einigen Büchern und auch im Netz zu finden sind, kritisiert und hinterfragt. Damit stellt sich in besonderer Weise die Frage, wie das Üben und damit auch eine Übungsaufgabe sinnvoll gestaltet werden kann.

Sinnvolles Lernen im Mathematikunterricht (6647)

5.2 Projektbeschreibung und Zielsetzung

Im Projekt haben Kolleginnen und Kollegen des Clara-Schumann-Gymnasiums in Holzwickede, des Friedrich-Bährens-Gymnasiums in Schwerte, der Peter-Weiss-Gesamtschule in Unna sowie der Otto-Schott-Realschule in Witten und der Gustav-Heinemann-Gesamtschule in Dortmund zusammengearbeitet. Ziel war es, Kriterien für die Steigerung der Qualität und Effektivität der Übungen im Mathematikunterricht und bei den Hausaufgaben aufzuzeigen. Es wurden Merkmale für sinnvolles Üben gesammelt und diskutiert sowie Besonderheiten der Aufgabenvariation nach Prof. Dr. Regina Bruder und Prof. Dr. Timo Leuders angewandt. Ebenfalls wurden Diagnose- und Übungsaufgaben für unterschiedliche Leistungsniveaus der Schülerinnen und Schüler zusammengetragen. Dazu wurden Aufgaben vieler Mathematikschulbücher und Arbeitshefte auf ihre Effektivität hin untersucht.

Zur Frage, wann eine Übung effektiv ist, äußert sich H. W. Heymann (1998). Nach ihm sind Übungen dann effektiv, wenn

- Verständnis für Sinn und Notwendigkeit des Übens geweckt wird,
- Methoden des effizienten Übens vermittelt und eingeübt werden,
- Gelegenheit zur Entdeckung der Stärken und Schwächen beim Lernen gegeben wird und für den Umgang damit beraten wird,
- Übungen so organisiert werden, dass der eigene Fortschritt von den Schülerinnen und Schülern erkannt werden kann,

- häufiger kürzere Übungen als langes ununterbrochenes Üben an einem Stück durchgeführt werden,
- Übungsformen variiert werden, um vorzeitiger Ermüdung und dem Absinken des Interesses vorzubeugen,
- Schüler „Eselsbrücken" finden können und
- Schüler an der Ergebniskontrolle beteiligt werden.

Zur Qualität von Übungsphasen allgemein können auch die Betrachtungen von Hilbert Meyer (2004) zum guten Unterricht herangezogen werden. Hilbert Meyer spricht von intelligenten Übungsphasen des Unterrichts, wenn

- ausreichend oft und im richtigen Rhythmus geübt wird,
- die Übungsaufgaben passgenau zum Lerngegenstand formuliert werden,
- die Schülerinnen und Schüler Übungskompetenz entwickeln und die richtigen Lernstrategien nutzen und
- die Lehrerinnen und Lehrer gezielte Hilfestellungen beim Üben geben.

Als Indikatoren hierfür gibt er an:

- Es wird oft, aber kurz geübt. Dafür steht ausreichend Zeit zur Verfügung.
- Es gibt gemeinsam vereinbarte, von Lehrerinnen und Lehrern und den Schülerinnen und Schülern eingehaltene Regeln (z. B. zum Zugriff auf knappe Materialien, zur Lautstärke, zum Herumlaufen …).
- Es herrscht eine angenehm ruhige und konzentrierte Arbeitsatmosphäre.
- Es gibt nur wenige Unterrichtsstörungen; dort, wo sie doch auftreten, werden sie von Lehrerinnen und Lehrern und Schülerinnen und Schülern gleichermaßen diskret behoben.
- Die Schülerinnen und Schüler haben verstanden, was sie üben sollen; und wenn doch etwas unklar ist, wenden sie sich an Mitschülerinnen und Mitschüler oder an die Lehrerinnen und Lehrer.
- Es gibt personen-, ziel- und themen- oder methodendifferenzierte Übungsaufträge.
- Es gibt ansprechende, sich selbst erklärende Übungsmaterialien.
- Die Schülerinnen und Schüler haben ihre Übeutensilien dabei (Materialien, Hefte, Lernmittel).
- Die Materialien erlauben eine Kontrolle des Lernerfolgs – allein oder im Tandem.
- Die Lehrerin/der Lehrer beobachtet die Übungsversuche und gibt einzelnen Schülerinnen und Schülern, wo dies notwendig ist, fachliche Hilfestellungen.
- Die Übungsleistungen der Schülerinnen und Schüler werden anerkannt.
- Die Hausaufgaben werden kontrolliert und gewürdigt.

Für die Gestaltung der Übungsphasen sind insbesondere die Indikatoren hilfreich, da diese auch als Handlungs- und Gestaltungsempfehlungen verstanden werden können. Interessant ist der letzte

Indikator, da dieser nahelegt, dass Hausaufgaben grundsätzlich Übungen sind. Wahrscheinlich liegt dies darin begründet, dass traditionell viele Übungsphasen in Hausaufgabenzeiten verlagert wurden.

5.3 Üben in der Schule oder zu Hause

Im Rahmen der Diskussionen um Ganztagsschulen, aber auch in Zusammenhang mit der Schulzeitverkürzung am Gymnasium mit verstärktem Nachmittagsunterricht muss die Rolle der Hausaufgaben und damit dann auch der Ort des Übens neu diskutiert werden. Dies führt unweigerlich zu der Frage, wo denn hauptsächlich geübt werden soll.

An sehr vielen Schulen, hauptsächlich aber an Halbtagsschulen, werden die Übungen traditionell in Form von Hausaufgaben erledigt. Im Unterricht werden einige Musteraufgaben gerechnet, geübt werden soll zu Hause. Im Hausaufgabenerlass des Landes NRW wird der Umgang mit Hausaufgaben genau geregelt. Ganztagsschulen und Halbtagsschulen mit Nachmittagsunterricht können nur noch in sehr begrenztem Rahmen Hausaufgaben aufgeben, so dass hier in der Schule Zeiten und Formen des Übens entwickelt werden. Die Rolle der Hausaufgaben wird kontrovers diskutiert. Es haben sich zwei Lager gebildet. das Lager der Hausaufgabenbefürworter und das der Hausaufgabengegner.

Neben der Förderung von Selbstständigkeit und Konzentrationsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler werden von den Befürwortern häufig auch zeitökonomische Faktoren genannt. Da die Unterrichtszeit zu knapp bemessen sei, müssten Lern- und Übungszeiten nach Hause ausgelagert werden. Dem kann entgegengehalten werden, dass das Stellen, Kontrollieren und Besprechen von Hausaufgaben häufig wesentlich länger dauert als das Anfertigen. Zudem kann eine zu ausführliche Besprechung diejenigen Schülerinnen und Schüler langweilen und demotivieren, die ihre Hausaufgaben richtig gelöst haben. Es scheint effektiver zu sein, wenn die Aufgaben gleich im Unterricht gelöst werden (Helmke 2009; Kohler 2005).

Von den Hausaufgabengegnern wird auch noch ein weiteres Argument ins Spiel gebracht. Nach dem Schultag können zu viele Hausaufgaben zu einer Überforderung der Schülerinnen und Schüler führen. Sie können zu Hause nicht entspannen, denn „Hausaufgaben stellen eine Verlängerung des Leistungsdrucks dar" (Keck 1978), der in der Schule herrscht. Außerdem bedeuten Hausaufgaben einen Verlust der Freizeit und können eine Belastung für die ganze Familie darstellen (Höhmann und Holtappels 2006).

Prof. Dr. Hans Gängler (Professor für Sozialpädagogik und ihre Didaktik) von der TU Dresden hat durch Untersuchungen an Schulen herausgefunden, dass „Hausaufgaben keinerlei nachweisbaren Einfluss auf die Schulnoten haben", denn „gute Schüler werden durch Hausaufgaben nicht unbedingt noch besser, und schlechte Schüler begreifen zu Hause durch bloßes Wiederholen noch lange nicht, was sie schon am Vormittag nicht richtig verstanden haben" (*Pressemitteilung der technischen Universität Dresden* 2008).

Per Erlass ist geregelt, dass einheitliche Absprachen zu den Hausaufgaben in den entsprechenden Gremien wie Schul- und Fachkonferenz geschlossen werden. *Die Lehrerinnen und Lehrer dieses Pro-*

jekts lassen ihre Schülerinnen und Schüler vorwiegend im Unterricht üben und geben nur wenige Hausaufgaben auf. Mit diesem Konzept werden durchweg gute Erfahrungen gemacht.

Wenn Hausaufgaben aufgegeben werden, so ist es sinnvoll, „die sieben Eckpfeiler Ihrer Hausaufgabenpraxis“ zu beachten (Direktion für Erziehung 2009):

1. Hausaufgaben sind ein Thema des Kollegiums. Deshalb verfügt jede Schule über eine bewusste, regelmäßig überdachte Hausaufgabenkultur.

2. Hausaufgaben sind so oder so ein Fenster der Schule. Nutzen Sie es aktiv, zeigen und erklären Sie den Eltern Ihre Hausaufgabenkultur.

3. Lieber oft als viel! Geben Sie Ihren Schülerinnen und Schülern regelmäßig und eher kurze Hausaufgaben.

4. Qualität vor Quantität! Geben Sie denkanregende Hausaufgaben, welche den weiteren Unterricht vorbereiten.

5. Differenzieren geht über studieren! Differenzieren Sie mit Sorgfalt.

6. Reden Sie mit Ihren Schülerinnen und Schülern über die Hausaufgaben. Klären Sie bei ihnen ab, über welche arbeitstechnischen, intellektuellen und motivationalen Voraussetzungen sie verfügen.

7. Gehen Sie nie davon aus, dass die Eltern beim Lösen und Betreuen der Hausaufgaben mitwirken können und sollen.

5.4 Übungsformate (mit Beispielen)

Nach diesen allgemeinen Überlegungen zu den Rahmenbedingungen sollen nun die Übungsaufgaben an sich genauer betrachtet werden. Dabei muss beachtet werden, dass Üben durchaus unterschiedlich gesehen werden kann.

Üben ist eine Lerntätigkeit, geübt wird alleine oder gemeinsam mit anderen. Das Ziel ist es, neue oder schon früher kennengelernte Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sowie Vorgehensstrategien in variierten Kontexten verfügbar zu machen und verständig anzuwenden (vgl. Bruder 2008b).

Ebenfalls sollen durch Übungen Fähigkeiten und Strategien flexibilisiert und Begriffe vernetzt und Selbstregulationskompetenzen, Selbstbewusstsein und Kreativität gestärkt werden (Büchter und Leuders 2005, S. 143).

In Tabelle 5.1 ist dargestellt, was von Schülerinnen und Schülern alles geübt werden kann. Geübt werden können Anwendung von Fachwissen (Kenntnisse), Fertigkeiten, Verstehen/Vorstellungen, Anwendungsfähigkeit, Strategien, Reflexionsfähigkeit und Einstellungen.

All diese Fähigkeitsaspekte sollen durch Üben gleichermaßen und nicht hierarchisierend gefördert werden. Gute Übungsaufgaben sprechen *alle* Fähigkeiten an und müssen für leistungsstarke

Fähigkeitsaspekt	Operation am Beispiel „Prozentrechnung“
Kenntnisse	die Prozentzahl mit eigenen Worten erklären, die Begriffe Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert erläutern
Fertigkeiten	fehlerlos Prozentzahlen in andere Zahlenformate umwandeln, fehlerlos einen Prozentsatz, einen Prozentwert und einen Grundwert berechnen
Verstehen/ Vorstellungen	am Beispiel/an einem Bild erläutern, was z. B. ein Prozentsatz ist
Anwendungsfähigkeit	in unbekannten Situationen Probleme mit der Prozentrechnung lösen
(übergreifende) Strategien	in einer unbekannten Situation, bei der es um „Prozent“ geht, sich zu helfen wissen, z. B. durch Betrachten von Beispielen
Reflexionsfähigkeit	beurteilen, ob es in einer bestimmten Situation sinnvoll ist, mit Prozentzahlen zu rechnen
Einstellungen	… und auch dazu bereit sein

Tabelle 5.1: Analyse von Fähigkeitsaspekten zum produktiven Üben (nach Leuders u. a. 2009, S. 130-143)

und -schwache Schülerinnen und Schüler zugänglich sein. Jedoch darf nicht das Automatisieren von Fähigkeiten allein im Vordergrund stehen, sondern es sollte immer auch dazu angeregt werden, die Begriffe und Verfahren in ihrer Bedeutung zu sehen, sie näher zu verstehen und zu reflektieren. Intelligentes Üben im Mathematikunterricht darf kein Üben für Intelligente werden, sondern es müssen alle Schülerinnen und Schüler angesprochen werden (siehe Leuders u. a. 2009, S. 130-143).
Abhängig von Gestaltung und Art der Übungsaufgaben unterscheidet Regina Bruder (2008a) verschiedene Übungsformate:

Explizites Üben: Basiswissen wird aufgefrischt bzw. gefestigt.

Implizites Üben: In Anwendungen werden Grundlagen verknüpft und mitgeübt.

Intelligentes Üben: Es werden ein vertieftes Verständnis mathematischer Zusammenhänge und das Üben an sich gelernt.

Produktives und vernetzendes Üben: Es werden verschiedene mathematische Themenfelder vernetzt und Sinnzusammenhänge geschaffen.

Reflektierende Übungen: Es wird eine Reflexion über das eigene Tun angeregt und Diagnosemöglichkeiten geschaffen.

Diese Übungsformate werden in den folgenden Abschnitten anhand von Beispielen kurz erläutert.

5.4.1 Explizites Üben

Das explizite Üben eignet sich vor allem für das Auffrischen von Basiswissen. Damit kann jeweils für bestimmte mathematische Inhalte überprüft werden, ob die Lernenden eine Lösungsstrategie beherrschen und bestimmte prozessbezogene Kompetenzen entwickelt haben.

Beispiele:

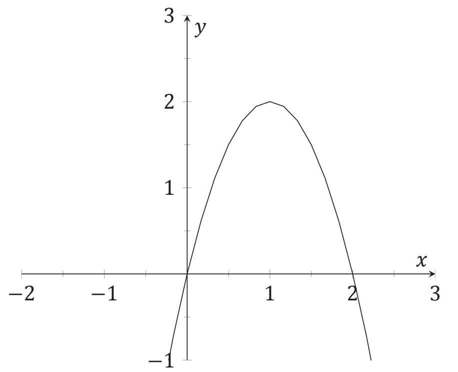
- Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 5 cm und 6 cm!
- Bestimme die Summe: $\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4}$.
- Ist $x = 3$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - 3x + 5 = 2x^2 - 4x + 1$?
- Wie groß ist die Innenwinkelsumme bei einem Fünfeck?

Eine besondere Form des expliziten Übens sind die sogenannten Kopfübungen. Bei einer Kopfübung werden eine bestimmte Anzahl von kompakten Basisaufgaben aus verschiedenen Inhaltsbereichen den Schülerinnen und Schülern in einem begrenzten Zeitfenster zur Bearbeitung gegeben, so dass die Schülerinnen und Schüler die zugehörigen, teilweise vor längerer Zeit erworbenen Kompetenzen erneut aktivieren und abrufen. Die Präsentation der Aufgaben kann in Form eines Arbeitsblattes oder durch Projektion auf eine Leinwand erfolgen. Ziel von regelmäßigen Kopfübungen ist es, erlernte Kompetenzen und Basiswissen auf lange Sicht abrufbereit zu halten.

Beispiel einer wiederholenden Kopfübung für eine neunte Klasse

1. Rechne um: $0.7\,\mathrm{m}^2 = \_\_\_\_\,\mathrm{cm}^2$
2. Ein Quader mit einem Volumen von 144 cm³ hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 6 cm. Wie hoch ist der Quader?
3. $-20 + 80 - 120 =$?
4. $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} =$?
5. Stelle nach h um: $A = \frac{g \cdot h}{2}$
6. 2 Mähdrescher bringen die Ernte eines Feldes in 12 Stunden ein. Wie lange benötigen 3 Mähdrescher für die gleiche Ernte?
7. Berechne 7 % von 300.
8. Skizziere den Graphen zu $f(x) = 3x–1$ (bzw. $y = 3x - 1$).

9. Ermittle einen passenden Funktionsterm.



10. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, beim dritten Wurf mit einem Würfel die erste 6 zu erzielen?

Die Auswertungen der Kopfübungen können zusätzlich für Diagnosezwecke genutzt werden. Hierbei hat es sich im Projekt als sehr hilfreich erwiesen, wenn die Aufgaben jeder Kopfübung durchnummeriert werden und die Aufgabe zu einer bestimmten Aufgabennummer immer aus demselben Inhaltsfeld gewählt wird, so dass zum Beispiel Aufgabe 4 immer zur Bruchrechnung gehört. Bei einer solchen Nummerierung können die Schüler, wenn sie über mehrere Kopfübungen ihren jeweiligen Leistungsstand in eine entsprechende Tabelle eintragen, ihre Leistungsentwicklung für jeden Bereich verfolgen.

Beispielhafter Auswertungsbogen für einen Schüler mit vier Kopfübungen:

	1. Größen umwandeln	2. Körper berechnen	3. ganze Zahlen	4. Brüche	5. Formeln umstellen	6. Dreisatz	7. Prozentrechnung	8. Graph – Term	9. Term – Graph	10. Wahrscheinlichkeit
1.	−	+	+	+	+	−	−	−	+	+
2.	−	−	+	−	−	+	+	+	+	+
3.	+	−	+	+	+	+	+	+	−	−
4.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

5.4.2 Implizites Üben

Bei dieser Übungsform werden Basiswissen-Aufgaben aus verschiedenen Inhaltsfeldern miteinander verknüpft.

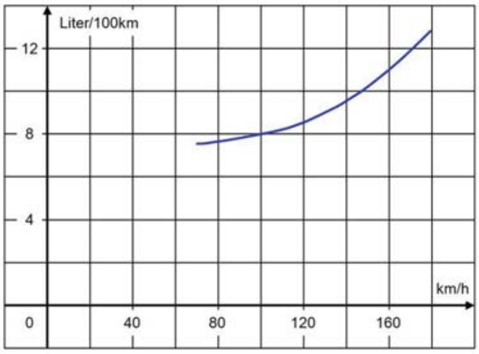
Beispiel:

Der Kraftstoffverbrauch wird für Fahrzeuge durch den durchschnittlichen Verbrauch in Litern (ℓ) auf einer Strecke von 100 Kilometern angegeben. Der Kraftstoffverbrauch eines Autos hängt vor allem von der gefahrenen Geschwindigkeit ab.

a) Das Diagramm zeigt den Kraftstoffverbrauch für ein Auto, das im höchsten Gang gefahren wird. Daher beginnt der Graph bei 70 km/h.

(1) Wie schnell fährt das Auto durchschnittlich, wenn es 11 ℓ auf 100 km verbraucht?

(2) Um wie viel Prozent liegt der Verbrauch bei 180 km/h über dem Verbrauch bei 100 km/h?
Notiere deine Rechnung.



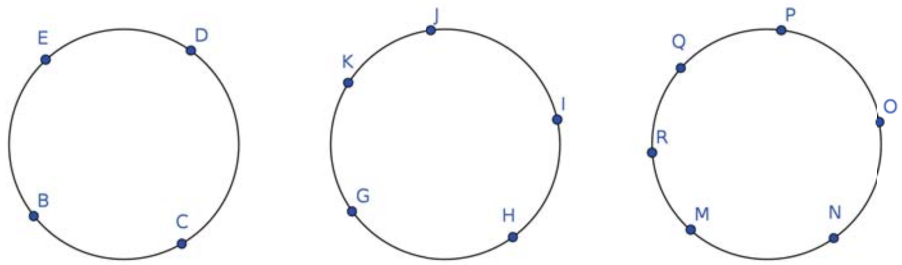
(Zentrale Prüfungen Mathematik 2012, Hauptschule Klasse 10, Typ B, Prüfungsteil 2)

5.4.3 Intelligentes Üben

Zum Lösen der Aufgaben dieses Übungsformats wird ein tieferes Verständnis mathematischer Zusammenhänge vorausgesetzt.

Folgendes Übungsbeispiel wurde in der Projektgruppe erarbeitet:

1. Jeweils auf einem Kreis sind vier, fünf und sechs verschiedene Punkte markiert. Bestimme jeweils die Anzahl der Strecken, mit denen man die vier Punkte B, C, D und E sowie die fünf Punkte G, H, I, J, K und die sechs Punkte M, N, O, P, Q, R verbinden kann.



2. Bestimme die Anzahl der Strecken, mit denen man sieben Punkte, die auf einem Kreis angeordnet sind, verbinden kann (zunächst ohne Zeichnung). Überprüfe das Ergebnis dann durch eine Zeichnung.
3. Hast du eine Gesetzmäßigkeit zur Bestimmung der Streckenanzahl entdeckt? Formuliere sie gegebenenfalls.
4. Gib einen Term zur Berechnung der Streckenanzahl an, wenn n Punkte auf einem Kreis markiert werden.
5. Berechne die Anzahl der Geraden, wenn 12, 20 oder 30 Punkte auf einem Kreis markiert werden.

5.4.4 Produktives Üben

Nach Wittmann (1990) liegt produktives Üben vor, wenn

- der Schüler/die Schülerin veranlasst wird, eigene Denkleistungen zu erbringen, Hindernisse und Widerstände ihm/ihr nicht aus dem Weg geräumt werden. Nur so lernt er/sie, diese zu überwinden,
- an den unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus der Aufgabenstellung sich Lernschwache bis Leistungsstarke beteiligen können (= natürliche Differenzierung);
- Bewusstheit und Verantwortung der Schülerin/des Schülers für ihr/sein Lernen gefördert werden,
- das Lernen und Üben in Sinn-Zusammenhängen erfolgt und dem Wesen der Mathematik und ihren Anwendungen entspricht,
- starke persönliche Beteiligung bei der Erarbeitung von Kenntnissen, Fertigkeiten und Denkstrategien zu viel besseren Langzeiterfolgen führen.

Auszug aus "Sinus.NRW - Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht", Handreichung, Ritterbach Verlag, 2013, Seiten 67 bis 84

Beispiel:

Der Betreiber eines Kinos mit durchschnittlich 450 Besuchern pro Tag möchte selbst Popcorn herstellen. Er kauft eine Popcorn-Maschine für 280 €. Pro Portion Popcorn benötigt man 50 g Mais, der in 10-kg-Packungen für jeweils 22 € gekauft werden kann. Zusätzlich entstehen für 100 Portionen noch 10 € Nebenkosten (für Öl, Zucker, Salz und Strom).

a) Im Preis für 10 kg Mais sind 7 % Mehrwertsteuer enthalten.

   Wie viel kosten 10 kg Mais ohne Mehrwertsteuer? Notiere deine Rechnung.

b) Zeige, dass das Kino für jeweils 100 Portionen Popcorn mit Kosten von 21 € (für den Mais und die oben angegebenen Nebenkosten) rechnen muss.

Berücksichtigt man die Anschaffungskosten für die Popcorn-Maschine, dann können die gesamten Kosten für x Portionen Popcorn mit der Funktionsgleichung $k(x) = 280 + 0{,}21 \cdot x$ berechnet werden. Bei einem Verkaufspreis von 2.50 € können die Einnahmen mit der Funktionsgleichung $e(x) = 2{,}5 \cdot x$ berechnet werden.

c) Zeichne beide Funktionen in ein Koordinatensystem ein

d) Berechne, ab welcher Anzahl verkaufter Portionen Popcorn die Einnahmen höher sind als die Kosten.

(Zentrale Prüfungen Mathematik 2011, Hauptschule Klasse 10, Typ B, Prüfungsteil 2)

5.4.5 Reflektierende Übungen

Diagnose und individuelle Förderung im Mathematikunterricht (6601)

Die reflektierende Übung greift Aspekte des intelligenten und produktiven Übens auf, fokussiert jedoch in eine bestimmte Richtung: Übungseffekte sollen für Schüler und Lehrer im Lernprozess transparent sein – verbunden mit klaren Übungszielen – und schließlich als temporales Lernergebnis auch greifbar sein (Bruder 2008a).

Beispiele für reflektierende Übungen findet man in Kapitel 3 zum SINUS-Projekt „Diagnose und individuelle Förderung im Mathematikunterricht (6601)“.

5.5 Übungsaufgaben selbst gestalten

Berücksichtigt man die Aussagen aus dem Kapitel Projektbeschreibung und Zielsetzung, Seite 67 f, dann kommt der Wahl von Übungsaufgaben eine große Bedeutung zu. Die Aufgaben sollen motivieren, zum Nachdenken anregen, mathematisch bedeutsam sein usw. In den moderneren Mathematik-Schulbüchern findet man daher immer weniger sogenannte „Plantagenaufgaben“, bei denen die

Übenden über mehrere Teilaufgaben immer wieder dieselben Rechnungen, Termumformungen, Äquivalenzumformungen etc. durchführen sollen.

Nach Leuders (2005) werden beim Automatisieren von Lösungstechniken Sinnzusammenhänge schnell verschüttet: „*Warum* kann man es so machen? *Wozu* ist das gut?" Solche Zusammenhänge und sinnstiftenden Momente aber braucht man, wenn eine Aufgabe einmal nicht genauso aussieht, wie man sie geübt hat, wenn man die Tätigkeit auf eine etwas andere Situation übertragen muss.

Die Qualität der Übungsaufgaben hat sich in den Schulbüchern schon wesentlich verändert. Mittlerweile findet man anspruchsvolle Aufgaben, die zum Nachdenken anregen und unterschiedliche prozessbezogene Kompetenzen fordern und fördern. Trotzdem wird häufig von Mathematiklehrerinnen und -lehrern kritisiert, dass zu wenig (einfache) Übungsaufgaben in den Schulbüchern vorhanden sind. Will eine Schule nicht die zum Schulbuch passenden Arbeitshefte anschaffen, müssen die Unterrichtenden die Übungsaufgaben selbst entwickeln.

Dies ist auf der einen Seite eine Mehrbelastung, auf der anderen Seite hat es den Vorteil, dass die Aufgaben nun konkret auf den Leistungsstand und das Leistungsvermögen der Schülerinnen und Schüler abgestimmt werden können.

Wer selbst Übungsaufgaben erstellen möchte, sollte in drei Schritten vorgehen. Im ersten Schritt sollte man sich klar machen, welche Ziele mit der Aufgabe verfolgt werden sollen. Dabei stellt man sich die Frage, welche Tätigkeit geübt werden soll.

Prüffragen vorher: Welche Tätigkeit soll geübt werden? (nach Leuders u. a. 2009)

- Das Wiedergeben von Wissen (Zusammenhänge, Bezeichnungen …) – wenn ja: Welche?
- Das Ausführen eines Verfahrens – wenn ja: Welches?
- Das Anwenden von Begriffen – wenn ja: Welche und auf welche Weise?
- Das Herstellen von Beziehungen – wenn ja: Welche?
- …

Im zweiten Schritt steht die Kreativität im Vordergrund, wenn man die Aufgaben selbst entwickelt oder geeignete Aufgaben aus Schulbüchern variiert. Um einer Monotonie vorzubeugen, sollten verschiedene Variationstechniken angewandt werden.

Nach der Kreativitätsphase müssen die entwickelten Aufgaben strukturiert werden. In einem dritten Schritt sollten die Aufgaben auf einen weiteren Optimierungsbedarf hin kontrolliert werden. Dieser Optimierungsbedarf könnte sich im Bereich der Effektivität, der Differenzierung, Flexibilität und im Bereich der Reflexivität ergeben.

Falls Nachbesserungen nötig sind, hilft die folgende Liste (nach Leuders u. a. 2009, S. 130-143):

Effektivität optimieren	Aufgaben optimieren … Verändern Sie die Aufgabenstellung, dass Schülerinnen und Schüler auf jeden Fall mehrere Beispiele bearbeiten müssen, z. B. durch direkte Aufforderung.
Differenzierung optimieren	Stellen Sie sicher, dass schwächere Schülerinnen und Schüler die Aufgabenstellung sofort verstehen können. Gegebenenfalls stellen sie eine einfachere, geschlossenere Einstiegsaufgabe mit Beispielcharakter voran.
Flexibilität optimieren	Formulieren Sie die Aufgabe so, dass es sich lohnt, auch einmal vom Ergebnis her zu denken oder einen Wert systematisch durchzuprobieren. Gegebenenfalls fordern Sie explizit dazu auf.
Reflexivität optimieren	Öffnen Sie die Aufgaben ggf. noch ein wenig dafür, dass Schülerinnen und Schüler Entscheidungen treffen können. Oder lassen Sie ein Phänomen verbal beschreiben, vergleichen, begründen …

Insbesondere die Optimierungsmöglichkeiten bezüglich der Reflexivität besitzen ein oft unterschätztes Potenzial. Nach Leuders u. a. (2009, S. 130-143) können viele Päckchen-Aufgaben, die keinen inneren Zusammenhang haben, bei denen die Automatisierung (mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden) im Vordergrund steht, durch Reflektionsfragen oder Reflektionsaufträge aufgewertet werden. Gute Schülerinnen und Schüler erhalten hierdurch eine zusätzliche Herausforderung ohne dass schwächere ausgeschlossen werden. Das Üben der Grundfertigkeiten ist weiterhin – je nach Art der Formulierung der Aufgabenstellung – expliziter oder impliziter Bestandteil der Aufgabe.

In einem Schulbuch könnte man z. B. die folgende Aufgabe finden:

> Berechne.
>
> a) $(+4)+(+11)$ b) $(-4)+(-11)$ c) $(-4)+(+11)$ d) $(+4)+(-11)$

Diese Aufgabe kann durch einen Auftrag zur Reflektion deutlich aufgewertet werden:

> *„Bringe die Aufgaben – ohne zu rechnen – in eine Reihenfolge, das kleinste Ergebnis zuerst. Begründe deine Reihenfolge. Überprüfe durch Rechnung oder Argumentation."*

5.6 Variationen vorhandener Aufgaben

Eine Möglichkeit, in der Kreativitätsphase eigene Aufgaben zu generieren, besteht darin, interessante Aufgaben aus Schulbüchern zu variieren. Bei der Klassifizierung nach Bruder, Leuders und Büchter 2008 werden die Aufgaben danach unterschieden, inwieweit jeweils Informationen über die Ausgangssituation, den Lösungsweg (bzw. Transformation) und die Endsituation (bzw. Lösung/

Ergebnis) vorliegen. Abhängig davon, zu welchem der drei Aspekte Informationen vorliegen, ergeben sich acht Aufgabentypen. Sie werden in der folgenden Tabelle dargestellt. „+“ bedeutet gegeben bzw. vorhanden und „–“ bedeutet gesucht bzw. nicht verfügbar.

Gegebenes	Transformation	Gesuchtes	Bezeichnung des Aufgabentyps
+	+	+	gelöste Aufgabe, Musteraufgabe, Aufgabe zur Fehlersuche
+	+	–	einfache Bestimmungsaufgabe (Grundaufgabe)
–	+	+	einfache Umkehraufgabe
+	–	+	Beweisaufgabe, Spielstrategie finden
–	–	+	schwierige Umkehraufgabe, Modellierungsproblem mit Zielvorgabe
–	+	–	Aufforderung, eine Aufgabe zu einem gegebenen mathematischen Werkzeug zu finden
+	–	–	schwere Bestimmungsaufgabe, auch: Teil einer gestuften Aufgabe
–	–	–	Problemsituation mit offenem Ausgang

Ausgehend von dieser Klassifizierung können vorhandene Aufgaben leicht variiert werden, indem entsprechende Informationen eingefügt oder weggelassen werden und somit aus einer Aufgabe eines Typs eine Aufgabe eines anderen Typs wird. Die acht Aufgabentypen unterscheiden sich in ihrer Komplexität und sind deshalb sehr gut geeignet, das individuelle Lernen zu fördern. Durch die verschiedenen Aufgabentypen werden leistungsschwächere sowie leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler unterschiedlich stark gefordert.

In einem Schulbuch könnte man die folgende Aufgabe finden:

Rechne im Kopf.

a) $(-5)+(-3)$ b) $(-3)+(-9)$ c) $(-3)+(-6)$ d) $(-3)+(-7)$

Die Aufgaben wurden von Mitgliedern unserer Projektgruppe in zwei Aufgabenformen variiert. Die mit „a“ gekennzeichneten Aufgaben wurden direkt variiert und bei den mit „b“ gekennzeichneten Aufgaben wurde zusätzlich ein möglicher Kontext angegeben.

1a	**+++**	Man addiert (-5) und (-3), indem man das gemeinsame Vorzeichen setzt und die Beträge addiert. Rechnung: $(-5)+(-3) = -(5+3) = -8$. Erläutere die Vorgehensweise mit eigenen Worten.
1b	**+++**	Leona hat sich zuerst 2 € von Patrick geliehen und später noch einmal 6 €. Jetzt gibt sie ihm 7 € zurück und meint, ihre Schulden damit beglichen zu haben. Patrick ist nicht einverstanden.
2a	**++–**	Addiere die beiden Zahlen (-8) und (-9), indem du ihre Beträge addierst und das gemeinsame Vorzeichen setzt.
2b	**++–**	Paul leiht sich erst 3 € und später noch einmal 7 €. Addiere die Beträge und gib an, wie viel Geld er zurückzahlen muss.
3a	**–++**	Welche Zahl muss man zu (-5) addieren, um (-8) zu erhalten?
3b	**–++**	Mehmet hat sich von seinem Vater erst 2 € geliehen und später noch einmal etwas. Nun soll er seinem Vater 8 € zurückgeben. Wie viel hatte Mehmet sich beim zweiten Mal geliehen?
4a	**+–+**	Addiert man die Zahlen (-8) und (-9), erhält man die Summe (-17). Gib den Rechenweg an.
4b	**+–+**	Sina hat sich gestern von Tom 8 € geliehen. Heute bettelt sie ihn schon wieder um 9 € an. Nun hat sie 17 € Schulden. Wie ist sie darauf gekommen?
5a	**+––**	Berechne $(-3) + (-7)$.
5b	**+––**	Sina hat sich gestern von Tom 3 € geliehen. Heute bettelt sie ihn schon wieder um 7 € an. Wie viel muss sie ihm nun insgesamt zurückgeben?
6a	**––+**	Die Summe zweier negativer Zahlen beträgt (-8). Gib die Summanden an, die zu der Summe gehören.
6b	**––+**	Kevin: „Wenn ich von Sina und Tom mein Geld zurück bekomme, kann ich heute Abend für 16 € ins Kino gehen." Wie viel Schulden hat jeder von beiden?
7a	**–+–**	Du weißt, dass man rationale Zahlen mit gleichem Vorzeichen addiert, indem man ihre Beträge addiert und das gemeinsame Vorzeichen setzt. Formuliere geeignete Beispielaufgaben sowohl mit positiven als auch negativen Zahlen.
7b	**–+–**	Wenn du an zwei Freunde Geld verleihst, dann fehlt dir die Summe der verliehenen Beträge in deiner Geldbörse. Gib Beispiele an.
8a	**–––**	Denke dir eine Aufgabe zur Addition zweier negativer Zahlen aus und löse sie.
8b	**–––**	Denk dir eine Geschichte zum Verleihen von zwei Geldbeträgen aus.

Blütenaufgaben in www.mister-mueller.de (6646)

Siehe auch Bruder, Leuders und Büchter (2008). Weitere Beispiele sind im Internet zu finden unter www.mister-mueller.de

5.7 Aufgabenvariationen zum Thema „Lösen von quadratischen Gleichungen"

Ein anderes Variationsbeispiel, welches in unserem Projekt erarbeitet wurde, wird im Folgenden dargestellt. Dabei sind die Unterpunkte a), b) … nicht als zusammengehörende Aufgabenteile, sondern als unterschiedliche Ideen oder verschiedene Schwierigkeitsgrade zu verstehen.

Begründungsaufforderung

Die quadratische Gleichung $x^2 + 3x = 10$ hat die Lösungen 2 und -5. Zeige, dass dies richtig ist. Begründe, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Aufgabenumkehr

a) Die Lösungen für die Gleichung $x^2 + 3x = 10$ sind 2 und -5.
Finde weitere quadratische Gleichungen mit diesen Lösungen.

b) Eine quadratische Gleichung hat die Lösung 2.
Gib mehrere Gleichungen mit dieser Lösung an.

c) Welche quadratischen Gleichungen haben nur die Lösung 2?

Explorationsauftrag

a) Gegeben sei die quadratische Gleichung $a \cdot (x^2 + 3x - 10) = 0$.
Wie verändern sich die Lösungen der Gleichung, wenn du verschiedene Werte für a wählst?

b) Gegeben sei die quadratische Gleichung $x^2 + 3x + c = 0$.
Nenne einen Wert für c, so dass die Gleichung 2 Lösungen hat.
Finde den Wert für c, so dass die Gleichung keine Lösung hat.
Kannst du einen Wert für c nennen, so dass die Gleichung eine Lösung hat?

Aufgaben erfinden lassen

Nenne drei quadratische Gleichungen, die sich durch Ausklammern (der Lösungsvariablen) lösen lassen.

Fehler finden

Finde die Fehler in Fritzchens Lösung:

a) $2x^2 - 9x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(x - 9) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ oder $x = 9$

b) $x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

Anwendungssuche

a) Erfinde ein Zahlenrätsel, dass zu der quadratischen Gleichung $x^2 + 3x = 10$ passt.

b) Skizziere ein Rechteck, das die quadratische Gleichung erläutert.
   i) $x(x+3) = 10$
   ii) $x^2 + 3x = 10$

c) Finde eine geometrische Darstellung, die die quadratische Gleichung erläutert.
   i) $x(x+3) = 10$
   ii) $x^2 + 3x = 10$

Fragen stellen

Der Anhalteweg eines PKW setzt sich zusammen aus dem Bremsweg und der Strecke, die während der Reaktionszeit zurückgelegt wird. (Die Reaktionszeit ist die Zeit vom Erkennen der Gefahr bis zu dem Beginn des Bremsvorgangs.) Der Anhalteweg in m kann grob mit dem Term $(0{,}1x)^2 + 0{,}3x$ bestimmt werden, wobei x die Geschwindigkeit in km/h ist, die das Fahrzeug beim Erkennen der Gefahr hatte. Formuliere geeignete Fragestellungen!

Informationen weglassen

Eine quadratische Funktion f, mit $f(x) = x^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, hat die Nullstelle 3. Wie lautet der Funktionsterm? Fällt dir was auf?

Stellungnahme

Der Anhalteweg eines PKW setzt sich zusammen aus dem Bremsweg und der Strecke, die während der Reaktionszeit zurückgelegt wird. (Die Reaktionszeit ist die Zeit vom Erkennen der Gefahr bis zu dem Beginn des Bremsvorgangs.) Der Anhalteweg in m kann grob mit dem Term $(0{,}004 \cdot x)^2 + 0{,}3 \cdot x$ bestimmt werden, wobei x die Geschwindigkeit in km/h ist, die das Fahrzeug beim Erkennen der Gefahr hatte.

Herr Müller fuhr mit der Geschwindigkeit 50 km/h auf eine ampelgesteuerte Kreuzung zu. 30 m vor der Ampel schaltet diese auf gelb. Herr Müller entschied sich nicht zu bremsen. Hinter der Ampel wurde er von der Polizei angehalten, weil er die rote Ampel nicht beachtet habe. Er behauptete, dass er nicht mehr hätte bremsen können.

Aufgabenvariationen

Kategorisieren

„Gleichungspool“ vorgeben mit Gleichungen in faktorisierter Form, reinquadratischen Gleichungen, Gleichungen in Normalform usw.

1. Finde die für dich leichteste und schwierigste Aufgabe. Begründe!
2. Ordne die quadratischen Gleichungen den Lösungsverfahren zu, die man anwenden kann, um die Gleichung zu lösen.

Auszug aus "Sinus.NRW - Impulse für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht", Handreichung, Ritterbach Verlag, 2013, Seiten 67 bis 84

5.8 Hilfe und Kontrolle

Sinnvolles Üben verlangt eine Rückmeldung der Sinnhaftigkeit und Korrektheit des Lösungsweges und des gefundenen Ergebnisses einer Übungsaufgabe. Ratlosigkeit bzw. Hilflosigkeit beim Üben ist demotivierend und kontraproduktiv. Jede Lehrperson hat in Übungsphasen schon frustrierte Schülerinnen und Schüler erlebt, die mit der Aussage „Das kann ich nicht!“ oder „Die Aufgabe verstehe ich nicht!“ ihre Passivität zu erklären versuchten. Entsprechendes gilt für die Kontrolle von Hausaufgaben. Manchmal reicht schon ein kleiner Denkanstoß, damit Schülerinnen und Schüler selbstständig einen sinnvollen Lösungsweg für eine Mathematikaufgabe finden.

Für die Durchführung von Übungsphasen sind unserer Meinung nach folgende Aspekte zu beachten:

- Die Aufgabenstellung sollte für alle verständlich sein. Ggf. sollte die Aufgabe vorgelesen werden, um im Anschluss daran Verständnisfragen zu klären.

- Übungen sollten in Partner-oder Gruppenarbeit durchgeführt werden, damit bessere Schülerinnen und Schüler Schwächeren helfen können. Es darf allerdings nicht nur abgeschrieben werden.

- Zur Unterstützung sollte/n
  - die Lehrperson für Fragen zur Verfügung stehen,
  - ein Hilfesystem (Schulbuch, eigene Aufzeichnungen, Hilfekarteikarten (siehe z. B. *Wege zum selbstregulierten Lernen*, S. 111 ff.), Musterlösung usw.) vorhanden sein,
  - individuelle Lösungswege gewürdigt werden,
  - Lösungswege miteinander verglichen und erläutert werden,
  - richtige Ergebnisse mitgeteilt werden und
  - gegebenenfalls Aufgaben von Schülerinnen und Schülern vorgerechnet werden.

Eine konzeptionelle Einordnung und Reflexion zum selbstregulierten Lernen finden sich in dem SINUS-Transfer-Band *Wege zum selbstregulierten Lernen*, S. 208 ff.

5.9 Ausblick

In sehr heterogenen Lerngruppen gestaltet es sich oft schwierig, für jede Schülerin und jeden Schüler geeignete Übungsaufgaben zu finden, die ihrem Leistungsstand entsprechen und ihnen während der Übungsphase die optimale Unterstützung bieten. In einem weiteren SINUS-Projekt sollten deswegen Konzepte für den Unterricht in sehr heterogenen Lerngruppen erarbeitet werden.

Weitere Beispiele für Übungsaufgaben, Hilfen und Musterlösungen zu diesem Projekt finden Sie unter www.sinus.nrw.de.

Sinnvolles Lernen im Mathematikunterricht (6647)

5.10 Literaturliste

Bruder, Regina (2008a). „Üben mit Konzept". In: *mathematik lehren* 147, S. 4–11.

Bruder, Regina (2008b). „Wider das Vergessen. Fit bleiben durch vermischte Kopfübungen." In: *mathematik lehren* 147, S. 12–14.

Bruder, Regina, Timo Leuders und Andreas Büchter (2008). *Mathematikunterricht entwickeln, Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten*. Cornelsen.

Büchter, Andreas und Timo Leuders (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln*. Cornelsen.

Direktion für Erziehung Kultur und Sport des Kantons Freiburg, Schweiz, Hrsg. (2009). *Hausaufgaben geben – erledigen – betreuen, Vom erfolgreichen Umgang mit Hausaufgaben*. Lehrmittelverlag Freiburg, Schweiz.

Helmke, Andreas (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Franz Emanuel Weinert gewidmet. Neubearb., 1. Aufl.* Hrsg. von Franz E. Weinert. Seelze-Velber: Kallmeyer u.a., S. 436.

Heymann, Hans W. (1998). „Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein?" In: *mathematik lehren* 33, S. 4–9.

Höhmann, Katrin und Heinz Günter Holtappels, Hrsg. (2006). *Ganztagsschule gestalten. Konzeption – Praxis – Impulse*. Kallmeyer Verlag.

Keck, Rudolf W. (1978). *Schulversuche und Schulreform. Berichte – Analysen – Ergebnisse*. Hrsg. von Niedersächsisches Kultusministerium. Hermann Schroedel Verlag.

Kohler, Britta (2005). „Unterrichtsqualität: Wie geht das? Fragen und Tipps." In: *Schulmagazin 5 bis 10* 73.10, S. 53–56.

Leuders, Timo (2005). „Intelligentes Üben selbst gestalten! Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht." In: *Pädagogik (Weinheim)* 57.11, S. 29–32. URL: https://www.ph-freiburg.de/fileadmin/dateien/fakultaet3/mathe/Mathe_fuer_alle/Leuders_Intelligentes_Ueben_selbst_gestalten_Vorabdruck.pdf (besucht am 18. 09. 2013).

Leuders, Timo u. a. (2009). *Mathe magische Momente*. Hrsg. von Timo Leuders, Lisa Hefendehl-Hebeker und Georg Weigand. Ein Projekt der GDM und der Deutschen Telekom Stiftung. Berlin: Cornelsen.

Meyer, Hilbert (2004). *Was ist guter Unterricht*. Cornelsen.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, Hrsg. (2007). *Wege zum selbstregulierten Lernen*. Klett Verlag.

Pressemitteilung der technischen Universität Dresden (2008). URL: http://tu-dresden.de/aktuelles/newsarchiv/2008/02/hausaufgaben (besucht am 18. 10. 2013).

Wittmann, Erich Ch. (1990). „Wider die Flut der ‚bunten Hunde' und der ‚grauen Päckchen': Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens." In: *Handbuch produktiver Rechenübungen Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Hrsg. von Erich Ch. Wittmann und Gerhard N Müller. Bd. 1. Klett, S. 152–166.