# Mathematische Experimente als Einstiege in Reihen

## Der Würfelturm

Zielgruppe: Klasse 7 (Lineare Zuordnungen)
Klasse 8 (Lineare Funktionen)

Um den Trick vorzuführen, benötigt man drei möglichst große sechsseitige Würfel. Diese werden von einem Schüler zu einem Turm aufgebaut. Nach einem kurzen Blick auf den Turm schreibt der Lehrer die Summe aller sichtbaren Augenzahlen auf einen Zettel und legt diesen neben dem Turm ab. Anschließend fragt er einen Schüler, ob dieser die sichtbaren Augenzahlen schnell addieren könne. Bei Bekanntgabe des Ergebnisses hebt der Lehrer seinen Zettel hoch. Dort steht - falls sich niemand verrrechnet hat - ebenfalls das richtige Ergebnis (vgl. von Engelhardt, Gustke [1]).

### Wie funktioniert der Trick?

Die Summe der Augenzahlen gegenüberliegender Seiten eines sechsseitigen Spielwürfels ist immer 7. Da es sich bei den Seitenflächen des Turmes um 12 Würfelflächen handelt, von denen sich je zwei gegenüber liegen, ergibt sich eine Augensumme von $6 \cdot 7 = 42$. Man muss also nur die Augenzahl der Deckfläche mit 42 addieren und das Ergebnis auf einen Zettel schreiben.

### Didaktischer Kommentar:

Bei der Entschlüsselung des Tricks werden sowohl die prozessbezogenen Kompetenzen „Problemlösen“ und „Argumentieren / Kommunizieren“ benötigt und erweitert als auch die inhaltsbezogenen Kompetenzen „Arithmetik / Algebra“ sowie „Funktionen“. Somit findet mit diesem offenen Einstieg eine Vernetzung der Kompetenzen statt.

Zunächst steht das strukturierte Arbeiten im Vordergrund: Berechnet man die Augensummen würfelweise, so erkennt man relativ schnell, dass die Augenzahlen des unteren und des mittleren Würfels zusammen immer 28 ergeben. Addiert man aber seitenweise, so kann man beliebig viele Beispiele berechnen und findet den Trick nicht heraus. Baut man bei jedem Beispiel einen neuen Turm auf, verändert man zu viele Faktoren gleichzeitig und kann keine vernünftigen Schlüsse ziehen. Verändert man aber nur den unteren oder mittleren Würfel, bleibt die Augensumme gleich. Setzt man den oberen Würfel mit einer neuen Deckfläche auf den Turm, verändert sich das Ergebnis. Dieses systematische Arbeiten fällt Schülern häufig bis in die Oberstufe schwer. Viele Physik-Kollegen beklagen sich über das Phänomen, dass Schüler immer wieder darauf hingewiesen werden müssen, im Experiment nur eine Größe zu verändern, da man nur dann Schlüsse über Abhängigkeiten ziehen kann. Somit hebt dieses mathematische Experiment nicht nur die Motivation, sondern führt auch in das wissenschaftspropedäutische Arbeiten ein. Um die Beobachtung der einzelnen Beispiele zu sichern, bietet es sich an, die Augen in einer Tabelle festzuhalten:

| | links | vorne | rechts | hinten | Deckel |
|---|---|---|---|---|---|
| oberer Würfel | | | | | |
| mittlerer Würfel | | | | | — |
| unterer Würfel | | | | | — |

Die Tabelle kann unten bzw. rechts durch eine Zeile bzw. Spalte ergänzt werden, in welche man die Spalten- bzw. Zeilensumme schreibt. Diese Tabelle liegt als Tipp verdeckt auf dem Pult. Falls die Schüler nicht weiter kommen, erhalten sie durch sie eine Strukturierungshilfe. Auf einem weiteren Zettel erhalten sie den Tipp, immer nur einen Würfel zu ändern. Das hat den Vorteil, dass die Gruppen sich auf lange Sicht gesehen vom Lehrer lösen und Probleme innerhalb der Gruppe mit Hilfe der Impulse auf den Zetteln bewältigen.

Haben die Schüler den Trick entschlüsselt, so erhalten sie den Auftrag, eine Formel zur Berechnung der Augensumme von Türmen mit drei, vier, fünf und $n$ ($n \in \mathbb{N}$) Würfeln zu erstellen. Da zuvor die Themen „proportionale Zuordnungen“ und „Terme“ behandelt wurden, sollte diese Aufgabe von den meisten Schülern gelöst werden können.

Natürlich kann es vorkommen, dass ein Schüler den Trick bereits kennt, daher sollten die Schüler zunächst gebeten werden, den Trick in diesem Fall für sich zu behalten. Außerdem sollte eine Alternative für diese Schüler bereitgestellt werden.

## **Das Paradoxon der nichttransitiven Würfel**

Zielgruppe: Klasse 8 (Kombinatorik)

Das erste Beispiel von nichttransitiven Würfeln stammt von dem Stochastiker Bradley Efron. Es handelt sich hierbei um das nachfolgende Beispiel. Dieses wurde in Martin Gardners Kolumne im Scientific American [2] erstmalig der Öffentlichkeit vorgestellt.

Zur Einführung in die Problematik der nichttransitiven Würfel erhalten die Schüler folgendes Arbeitsblatt:

---

### ***Welcher Würfel ist der Beste?***

*Vor euch liegen vier sechsseitige Würfel, die nicht wie üblich mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet sind, sondern wie folgt:*

*Würfel A:* $4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 0,\ 0$

*Würfel B:* $3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3$

*Würfel C:* $6,\ 6,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2$

*Würfel D:* $5,\ 5,\ 5,\ 1,\ 1,\ 1$

*Spielt das Spiel: „Hoch gewinnt“. Dazu sucht sich jeder von euch einen Würfel aus und würfelt. Der Spieler, der die höhere Augenzahl würfelt, erhält einen Punkt. Dies wiederholt ihr mit denselben Würfeln so lange, bis einer von euch 20 Punkte erreicht hat. Nun darf sich der Verlierer einen neuen Würfel aussuchen. Spielt das Spiel so lange, bis jeder Würfel gegen die drei anderen Würfel angetreten ist. Vergesst nicht, eure Ergebnisse zu notieren!*

| *Würfel* | *A* | *B* |
|---|---|---|
| *Punkte* | | |

| *Würfel* | *A* | *C* |
|---|---|---|
| *Punkte* | | |

| *Würfel* | *A* | *D* |
|---|---|---|
| *Punkte* | | |

| *Würfel* | *B* | *C* |
|---|---|---|
| *Punkte* | | |

| *Würfel* | *B* | *D* |
|---|---|---|
| *Punkte* | | |

| *Würfel* | *C* | *D* |
|---|---|---|
| *Punkte* | | |

*Könnt ihr nun entscheiden, welcher Würfel der Beste ist? Begründet eure Entscheidung mathematisch.*

---

Die Schüler werden voraussichtlich folgendes Ergebnis erhalten:

Würfel A ist besser als Würfel B,

Würfel B ist besser als Würfel C,

Würfel C ist besser als Würfel D,

Würfel D ist besser als Würfel A.

Welches Ergebnis sie für die Würfel A und C bzw. B und D erhalten, lässt sich bei der geringen Anzahl von Würfen nicht voraussagen. Dieses Ergebnis widerspricht den alltäglichen Erfahrungen der Schüler, denn im Alltag gilt: Ein Apfel ist größer als eine Kirsche, eine Melone ist größer als ein Apfel, also ist die Melone auch größer als die Kirsche.

**Mathematischer Hintergrund des Paradoxons:**

*Eine Ordnung „>“ auf einer Menge $M$ heißt transitiv, wenn für alle $X, Y, Z \in M$ aus $X > Y$ und $Y > Z$ folgt, dass $X > Z$ ist.*

Hier ist $M$ die Menge der vier Würfel A,B,C und D. Die Ordnung „>“ auf $M$ ist wie folgt definiert:

*Seien $X$ und $Y$ Elemente der Menge $M$. Würfel $X$ ist „größer“ als Würfel $Y$, falls die Wahrscheinlichkeit Würfel $Y$ in einer Runde zu schlagen größer als $\frac{1}{2}$ ist.*

Mit Hilfe eines Baumdiagramms lässt sich leicht zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl von Würfel A größer als die Augenzahl von Würfel B ist (kurz: $P(A > B)$), gleich $\frac{2}{3}$ ist. Ebenso zeigt man:

$$P(A > B) = P(B > C) = P(C > D) = P(D > A) = \tfrac{2}{3}\,,$$
$$P(A > C) = \tfrac{4}{9} \quad \text{und} \quad P(B > D) = \tfrac{1}{2}\,.$$

Also gilt für ein Spiel mit hinreichend vielen Runden: $A > B > C > D > A$. Die vier Würfel sind somit nichttransitiv. Wären sie transitiv, so würde aus „A schlägt B“, „B schlägt C“ und „C schlägt D“ folgen, dass Würfel A auch Würfel $D$ schlägt. Dies ist ein Widerspruch zu $P(D > A) = \frac{2}{3}$.

**Didaktischer Kommentar:**

Um das Paradoxon mathematisch zu durchschauen, benötigt man Baumdiagramme. Diese gehören allerdings zu den Kompetenzerwartungen der 8. Klasse (vgl. Kernlehrplan G8 [3], S.28). Um dieses Problem trotzdem als Einstieg in die Kombinatorik nutzen zu können, bietet sich folgende Tabelle an:

Ist Würfel A besser als Würfel B?

| $B \setminus A$ | 4 | 4 | 4 | 4 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × | × |
| 3 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × | × |
| 3 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × | × |
| 3 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × | × |
| 3 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × | × |
| 3 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | × | × |

In 24 von 36 Fällen hat Würfel A die höhere Augenzahl. Daher gilt $P(A > B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. Das Spiel werden alle Schüler deuten können. Da sie so lange würfeln, bis ein Würfel 20mal gewonnen hat, ist die Entdeckung, dass es keinen besten Würfel gibt, relativ sicher. Sollte eine Gruppe einen Würfel entdecken, der alle anderen besiegt, ist dies ein guter Moment, um noch einmal über Messfehler bei Experimenten zu sprechen, bzw. den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ einzuführen. Bei der mathematischen Begründung werden einige Schüler sicherlich Schwierigkeiten haben. Daher liegt die Tabelle als Tipp verdeckt auf dem Pult. In jedem Bastelladen gibt es Blankowürfel, so dass man diese Würfel leicht erstellen kann.

# Literatur

[1] von Engelhardt, Ingrid; Gustke, Achim: Praxis Impulse, Zaubern mit Mathematik, Verblüffende Ideen für den Unterricht. Braunschweig 2005.

[2] Gardner, Martin: The paradox of the nontransitive dice and the elusive principle of indifference. In: Scientific American 223, Dez. 1970, S.110-114.

[3] Ministerium fr Schule, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen: Kernlehrplan (G8) fr das Gymnasium - Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen. Heft 3401(G8). In Kraft seit dem 1.8.2007. Copyright by Ritterbach Verlag GmbH, Frechen.