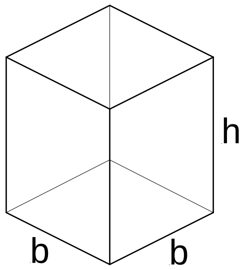
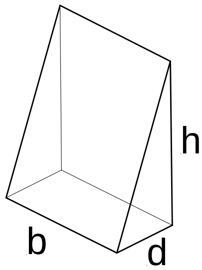
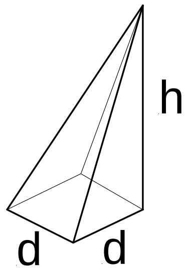
Hilfekarten

Gruppe 1

1.21
Ein Pyramidenstumpf setzt sich zusammen aus 4 Teilpyramiden, 4 Keilen und einer quadratischen Säule.

Teilkörper	Quadratische Säule	Keil	Pyramide
Skizze			
Anzahl	1	4	4
Volumenformel	$V_S = b \cdot b \cdot h$	$V_K = \frac{1}{2} \cdot b \cdot d \cdot h$	$V_P = \frac{1}{3} \cdot d \cdot d \cdot h$

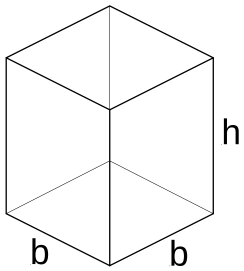
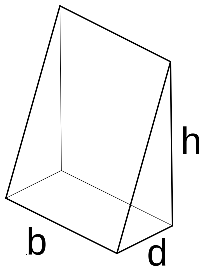
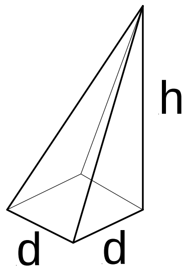
1.22
Gegeben: $b = 4\ cm, d = \frac{1}{2}(10\ cm - 4\ cm) = 3\ cm, h = 8\ cm$

Rechnung: $V = 4 \cdot V_P + 4 \cdot V_K + V_S$

$$V = \frac{1}{3} \cdot d \cdot d \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b \cdot d \cdot h + b \cdot b \cdot h$$
$$V = 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3\ cm \cdot 3\ cm \cdot 8\ cm\right) + 4 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 4\ cm \cdot 3\ cm \cdot 8\ cm) + 4\ cm \cdot 4\ cm \cdot 8cm$$
$$V = 96\ cm^3 + 192\ cm^3 + 128\ cm^3$$
$$V = 416\ cm^3$$

Antwort: Das Volumen des Pyramidenstumpfes mit den angegebenen Maßen beträgt 416 cm^3.

1.31
Ein Pyramidenstumpf setzt sich zusammen aus 4 Teilpyramiden, 4 Keilen und einer quadratischen Säule.

Teilkörper	Quadratische Säule	Keil	Pyramide
Skizze			
Anzahl	1	4	4
Volumenformel	$V_S = b \cdot b \cdot h$	$V_K = \frac{1}{2} \cdot b \cdot d \cdot h$	$V_P = \frac{1}{3} \cdot d \cdot d \cdot h$

1.32
Das Volumen des Pyramidenstumpfes ist gleich der Summe der Volumina der Teilkörper:

$V = 4 \cdot V_P + 4 \cdot V_K + V_S$

$V = 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot d \cdot d \cdot h\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot d \cdot h\right) + b \cdot b \cdot h$

V=$\frac{4}{3} \cdot d \cdot d \cdot h + 2 \cdot b \cdot d \cdot h + b \cdot b \cdot h$

$V = h\left(\frac{4}{3} \cdot d \cdot d + 2 \cdot b \cdot d + b \cdot b\right)$

Es wird mit den allgemeinen Größen weitergerechnet.

Es gilt: $2d = a - b \; oder \; d = \frac{a-b}{2}$

$V = h \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} + 2 \cdot b \cdot \frac{a-b}{2} + b \cdot b\right)$

$V = h \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + ab - b^2 + b^2\right)$

$V = h \cdot \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}ab + \frac{1}{3}b^2 + ab\right)$

$V = h \cdot \left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}b^2\right)$

$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$

1.33
Kontrolle

$Gegeben: a = 10 \; cm, b = 4 \; cm, h = 8 \; cm$

Rechnung:

$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$

$V = \frac{1}{3} \cdot 8 \; cm \cdot (100 \; cm^2 + 40 \; cm^2 + 16 \; cm^2)$

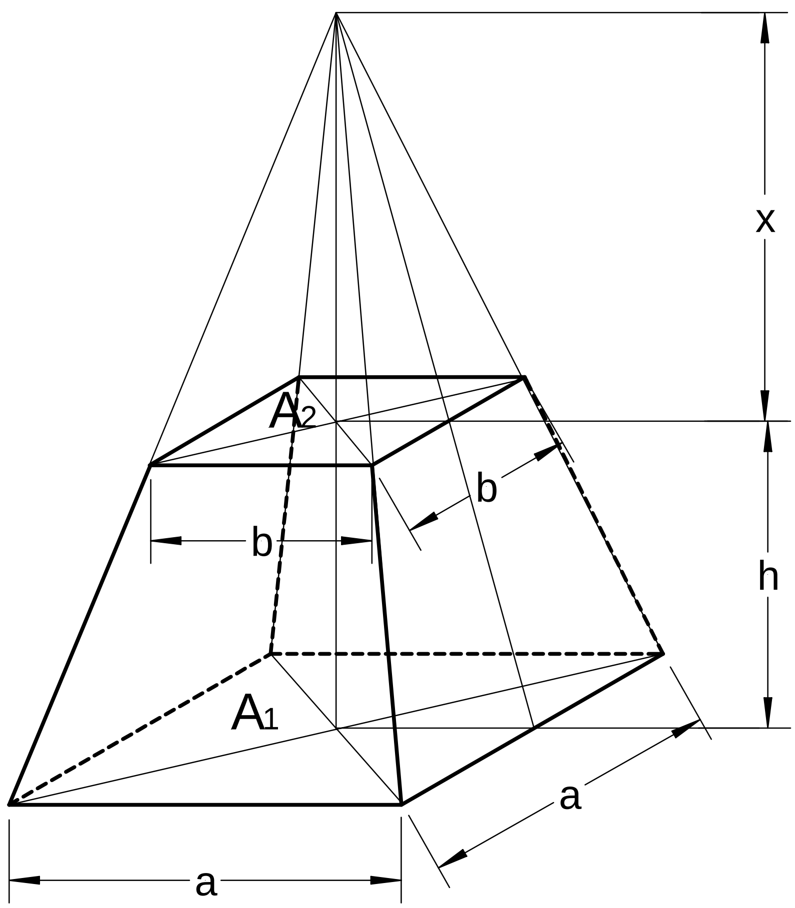
$V = \frac{1}{3} \cdot 8 \; cm \cdot 156 \; cm^2 = 416 \; cm^3$

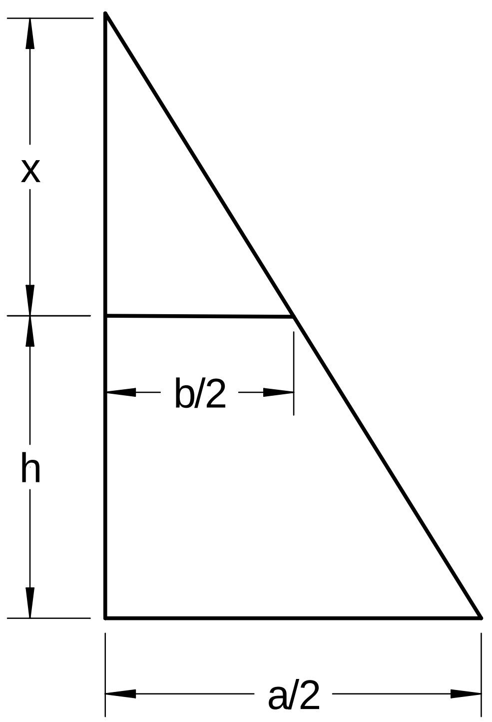
Antwort: Das Volumen des Pyramidenstumpfes mit den angegebenen Maßen beträgt 416 cm^3.

Gruppe 2:

Subtraktion des Volumens der Pyramidenspitze von der vollständigen Pyramide an einem Beispiel

2.1





2.21 Bestimmung des Volumens des Pyramidenstumpfes mit den angegebenen Maßen $Gegeben: a = 10\ cm, b = 4\ cm, h = 8cm$ Rechnung: Bestimmung der Höhe von der Ergänzungspyramide durch Anwendung des Strahlensatzes: $\frac{x}{x+h} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{x+h} = \frac{b}{a}$ $x \cdot a = (x+h) \cdot b \Leftrightarrow xa = xb + hb \Leftrightarrow xa - xb = hb \Leftrightarrow x(a-b) = hb \Leftrightarrow x = \frac{hb}{a-b}$ x kann jetzt berechnet werden: $x = \frac{8\ cm \cdot 4cm}{10\ cm - 4cm} \Leftrightarrow x = \frac{16}{3}\ cm$
2.22 $Gegeben: a = 10\ cm, b = 4\ cm, h = 8cm, H = \frac{40}{3}\ cm$ Rechnung: V_g ist das Volumen der großen Pyramide, V_E ist das Volumen der Ergänzungspyramide $V = V_g - V_E$ $V = \frac{1}{3}(10\ cm)^2 \cdot \frac{40}{3}\ cm - \frac{1}{3}(4\ cm)^2 \cdot \frac{16}{3}\ cm$ $V = 416\ cm^3$ Antwort: Antwort: Das Volumen des Pyramidenstumpfes mit den angegebenen Maßen beträgt 416 cm^3.

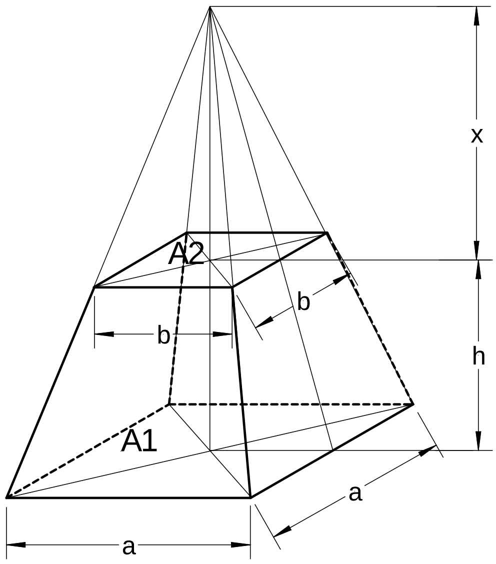
Gruppe 3

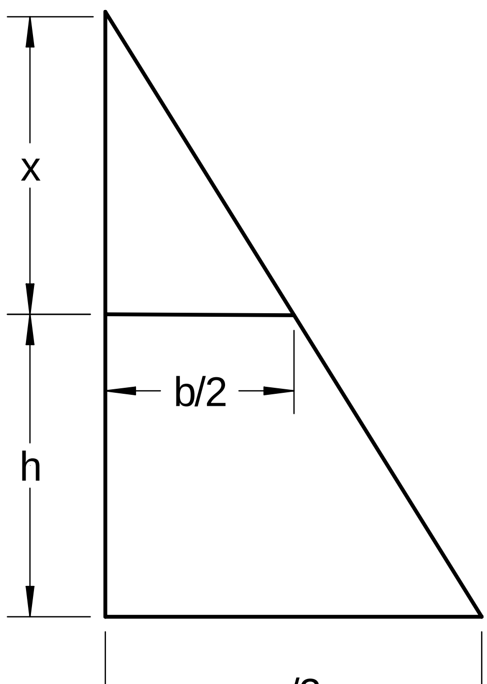
Pyramidenstumpf

(Lösung und Folge der Arbeitskarten)

Herleitung der Formel zur Berechnung des Volumens
durch Subraktion von Pyramidenvolumina

Planfigur:





Berechnung	Tipps für Schüler
Schritt 1: Aufstellen einer Formel	
V1 sei das Volumen der Vollpyramide V2 sei das Volumen der Ergänzungspyramide $V = V_1 - V_2$	Das gesuchte Volumen ist gleich der Differenz aus dem Volumen V_1 der Vollpyramide und dem Volumen V_2 der Ergänzungspyramide
$V = \frac{1}{3} A_1 (h + x) - \frac{1}{3} A_2 \; x$	**Arbeitskarte 1.1** Ersetze V_1 und V_2 mithilfe der Pyramidenformel, rechter Term enthält A_1, A_2, h und x
$V = \frac{1}{3} [A_1 h + A_1 x - A_2 \; x]$	**Arbeitskarte 1.2** $\frac{1}{3}$ ausklammern und die runde Klammer ausmultiplizieren
$V = \frac{1}{3} [A_1 h + x (A_1 - A_2)]$	**Arbeitskarte 1.3** x ausklammern
Schritt 2: x durch bekannte Größen des Pyramidenstumpfes ersetzen	
$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{x+h}{x}}$	Wende den 2. Strahlensatz an und stelle eine Gleichung mit a, b, h und x auf
$\boldsymbol{\frac{a^2}{b^2} = \frac{(h+x)^2}{x^2}}$	**Arbeitskarte 2.1** Quadriere die Gleichung
$\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{(h+x)^2}{x^2}}$	**Arbeitskarte 2.2** Ersetze a^2 durch A_1 und b^2 durch A_2
$\boldsymbol{\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} = \frac{x+h}{x}}$	**Arbeitskarte 2.3** Ziehe die Wurzel

	Löse die Gleichung nach x auf
$x\sqrt{A_1} = (x+h)\sqrt{A_2}$	**Arbeitskarte 2.4** Löse die Gleichung nach x auf: Multipliziere die Gleichung mit dem Hauptnenner
$x\sqrt{A_1} = x\sqrt{A_2} + h\sqrt{A_2}$	**Arbeitskarte 2.5** Löse die Gleichung nach x auf: Löse die Klammern auf (ausmultiplizieren)
$x\sqrt{A_1} - x\sqrt{A_2} = h\sqrt{A_2}$	**Arbeitskarte 2.6** Löse die Gleichung nach x auf: $-x\sqrt{A_2}$
$x\left(\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}\right) = h\sqrt{A_2}$	**Arbeitskarte 2.7** x ausklammern
$x = \frac{h\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}}$	**Arbeitskarte 2.8** Teile die Gleichung durch $\left(\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}\right)$, da $A_1 \neq A_2$

Schritt 3: x durch den neuen Term ersetzen und die Formel umformen

$V = \frac{1}{3}\ [A_1 h + \frac{h\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2}} (A_1 - A_2)\ ]$	Für x den Term $\frac{\sqrt{G_2} \cdot h}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}}$ einsetzen
$V = \frac{1}{3}\left[A_1 h + \frac{h\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}}\ \left(\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}\right)\left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)\right]$	**Arbeitskarte 3.1** 3. binomische Formel anwenden um den Nenner zu beseitigen
$V = \frac{1}{3}\left[A_1 h + h\sqrt{A_2}\ \left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)\right]$	**Arbeitskarte 3.2** Kürzen

$V = \frac{1}{3}\left[A_1 h + h\sqrt{A_2}\sqrt{A_1} + h\sqrt{A_2}\sqrt{A_2}\right]$	**Arbeitskarte 3.3** Runde Klammer ausmultiplizieren
$V = \frac{1}{3}\left[A_1 h + h\sqrt{A_2}\sqrt{A_1} + hA_2\right]$	**Arbeitskarte 3.4** Zusammenfassen
$V = \frac{1}{3}h\left[A_1 + \sqrt{A_2}\sqrt{A_1} + A_2\right]$ $V = \frac{1}{3}h\left[A_1 + \sqrt{A_1}\sqrt{A_2} + A_2\right]$	**Arbeitskarte 3.5** h ausklammern